OM
NOGLE CURVERS RECTIFICATION
VED ELLIPTISKE FUNCTIONER

VED

C. RAMUS.

Ellipsens, Hyperblens og Lemniscatens Rectificationer ved elliptiske Functioner ere bekjendte. Ellipsens Rectification udtrykkes ved Functionen af 2den Art, Hyperblens ved en Combination af Functionerne af 1ste og 2den Art, eller ved Functionen af 3die Art med Parameter $= -1$, Lemniscatens ved Functionen af 1ste Art med Modulus $= \sqrt{\frac{1}{2}}$. De Substitutioner, som hertil anvendes, lede paa en meget simpel Maade til Ellipsebuens, Hyperbelbuens, Lemniscatbuens Udtryk ved de nævnte Functioner; men med Hensyn til Hyperblen indsees ikke umiddelbart, hvad der har ledet til den brugte Substitution, ligesom man ogsaa ved denne Curve savner den geometriske Betydning af Amplituden, hvilken derimod for Ellipsen fremstilles ved en let Construction formedelst Ellipsens omskrevne Cirkel. Hyperblens Amplitude er, som her skal vises, afhængig af en Curve af 4de Grad, som er rectificerlig ved den elliptiske Function af 3die Art og som specielt indbefatter Lemniscaten, medens den selv er indbefattet i en almindeligere Classe af Curver af 4de Grad, som rectificeres ved en Combination af elliptiske Functioner af 1ste og 3die Art. Herunder er den Curve indbefattet, i hvilken et vilkaarligt Punkt har til to faste Punkter Afstande, hvis Produkt er constant, og for denne erholdes Rectificationen udtrykt ved Functionen af 1ste Art alene, hvoraf atter specielt Lemniscatens Rectification erholdes.

1. Af Ellipsens Ligning

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

fölger Udtrykket for Ellipsebuen s regnet fra $x=0$ d. e. fra den korte Axes Endepunkt:

$$s=\int_0^x\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_0^x\frac{\sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dx.$$

Ifölge de almindelige Regler for de elliptiske Integralers Transformation erholdes:

$$x=a\sin\varphi,\quad \lambda=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\quad s=aE(\lambda,\varphi). \tag{2}$$

Det sees, at Modulus λ er liig Ellipsens Excentricitet, og at Amplituden φ er den Centrivinkel, som begrændses af den korte Axe og af Radius til det Punkt i Ellipsens omskrevne Cirkel, hvor denne træffes af Ellipsens forlængede Ordinat. *Legendre* transformerer umiddelbart $\sqrt{dx^2+dy^2}$ ved at sætte $x=a\sin\varphi$, $y=b\cos\varphi$.

2. Af Hyperblens Ligning

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

fölger Udtrykket for Hyperbelbuen Υ regnet fra $x=a$ d. e. fra Toppunktet:

$$\Upsilon=\int_a\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^x\frac{\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-1}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}dx.$$

Ifölge de almindelige Regler for Transformationen erholdes

$$x=\frac{a}{\sin\omega},\quad \lambda=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \Upsilon=\frac{a}{\lambda}\int_\omega^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta(\lambda,\omega)}{\sin^2\omega}d\omega, \tag{4}$$

eller ved den bekjendte Reductionsmethode

$$\Upsilon = \frac{a}{\lambda}\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\lambda^2}{\Delta} + \frac{1}{\sin^2\omega . \Delta}\right) d\,\omega$$

$$= -a\,\lambda(F^1 - F(\omega)) + \frac{a}{\lambda}\Big[(F^1 - F(\omega)) - (E^1 - E(\omega)) + \Delta \cot\omega\Big]$$

$$= \frac{b^2}{a}\lambda\,(F^1 - F(\omega)) - \frac{a}{\lambda}(E^1 - E(\omega)) + \frac{a}{\lambda}\Delta\cot\omega.$$

Betegnes Moduli Complement ved $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ og sættes $\lambda' \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\omega = 1$ eller $\sin\omega = \frac{\cos\varphi}{\Delta(\lambda,\varphi)}$, altsaa $x = \frac{a}{\cos\varphi}\Delta(\lambda,\varphi)$, erholdes, idet φ og ω ere complementære Amplituder,

$$F^1 - F(\omega) = F(\varphi),\quad E^1 - E(\omega) = E(\varphi) - \lambda^2\sin\varphi\sin\omega,$$

fölgelig

$$\Upsilon = \frac{b^2}{a}\lambda\,F(\varphi) - \frac{a}{\lambda}E(\varphi) + a\,\lambda\sin\varphi\sin\omega + \frac{a}{\lambda}\Delta(\omega)\cot\omega,$$

hvilket Resultat ogsaa kan fremstilles saaledes:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\frac{\Delta(\lambda,\varphi)}{\cos\varphi},\quad \lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \Upsilon &= \sqrt{a^2+b^2}\Big[\Delta(\lambda,\varphi)\operatorname{tg}\varphi + \frac{b^2}{a^2+b^2}F(\lambda,\varphi) - E(\lambda,\varphi)\Big].\end{aligned}\right\}\quad (5)$$

Modulus er her liig Enheden divideret med Hyperblens Excentricitet. Til $x = a\frac{\Delta(\lambda,\varphi)}{\cos\varphi}$ svarer ifölge (3) $y = b\,\lambda'\operatorname{tg}\varphi$ eller, ifölge Værdien af λ', $y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\varphi$. Heri bestaaer *Legendres* Substitution, idet han sætter $a^2+b^2=1$ og $y = b^2\operatorname{tg}\varphi$, og derved umiddelbart transformerer $\sqrt{dx^2+dy^2}$, uden at det sees, hvorledes denne Substitution er funden. Det kan alene bemærkes, at da y varierer fra 0 til ∞ ifölge Hyperblens Figur, kunde man som Forsög antage

$$y = k\operatorname{tg}\varphi, \tag{6}$$

idet k er en ubestemt Constant, hvis Værdie senere kan vælges. Herved erholdes $x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+k^2\operatorname{tg}^2\varphi}$, og ved derefter at söge dx og dy findes

$$\left.\begin{aligned} \Upsilon &= k\int_0^{\varphi}\frac{\sqrt{1+m\sin^2\varphi}}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta(\mu,\varphi)}, \\ \mu^2 &= 1-\frac{k^2}{b^2},\quad m=\frac{a^2k^2}{b^4}-\mu^2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Sættes nu, for at simplificere dette Udtryk, $m=0$, haves $k=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, hvorved erholdes som ovenfor $y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\varphi$ samt

$$\Upsilon=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\Pi(-1,\lambda,\varphi), \tag{8}$$

idet $\lambda=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Indsættes dernæst i (8) istedetfor $\Pi(-1,\lambda,\varphi)$ dens bekjendte Udtryk ved $F(\lambda,\varphi)$ og $E(\lambda,\varphi)$, erholdes Formlen (5) for Υ. Udtrykket (7) kunde ogsaa reduceres til elliptiske Functioner uden at man satte $m=0$. Ved nemlig at indsætte $\sin\varphi=\frac{\cos\omega}{\Delta(\mu,\omega)}$, saa at φ og ω ere complementære Amplituder svarende til Modulus μ, erholdes atter Udtrykket (4). Tillige sees ved i (6) og (7) for φ at skrive ψ, at de Substitutioner, hvorved man successive transformerer (7) til (4) og (4) til (5), nemlig

$$\sin\psi=\frac{b}{\sqrt{b^2+k^2\operatorname{tg}^2\omega}},\quad \operatorname{tg}\omega=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\cot\varphi,$$

give $\operatorname{tg}\psi=\frac{b^2}{k\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\varphi$. Da nu ifölge (6) $y=k\operatorname{tg}\psi$, vil den umiddelbare Substitution, hvorved (5) erholdes, være som forhen $y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{tg}\varphi$.

3. Betegnes Hyperblens Centrum ved C, Toppunktet ved A, det vilkaarlige Punkt ved M, saa at $AM=\Upsilon$, drages dernæst den rörende

Linie til Hyperblen MZ og $CZ \perp MZ$, saa vil, som Legendre har bemærket, MZ fremstille Værdien af det algebraiske Led i Udtrykket (5) for Υ. Ligningerne for Linierne MZ og CZ ere nemlig

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \quad Y = -\frac{dx}{dy}X,$$

hvoraf Coordinaterne til Punktet Z findes:

$$Y = \frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}, \quad X = -\frac{dy}{dx}Y.$$

Indsættes her Udtrykkene ved φ,

$$y = b\,\lambda' \operatorname{tg}\varphi, \quad x = a\frac{\varDelta(\lambda, \varphi)}{\cos\varphi}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varDelta(\lambda, \varphi)}{\lambda \sin\varphi},$$

erholdes

$$Y = -a\lambda \sin\varphi \cos\varphi, \quad X = a\varDelta(\lambda, \varphi)\cos\varphi. \tag{9}$$

Heraf findes $CZ = \sqrt{X^2 + Y^2}$, $CM = \sqrt{x^2 + y^2}$, $MZ = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{CZ}^2}$, nemlig

$$CZ = a\cos\varphi, \quad CM = \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2\varphi}, \quad MZ = \sqrt{a^2 + b^2}\,\varDelta(\lambda, \varphi)\operatorname{tg}\varphi. \tag{10}$$

Af Udtrykket for CZ fölger, at naar om C som Centrum med Radius $CA = a$ beskrives en Cirkelbue AB, som i B skjærer den rörende Linie MZ, haves

$$\varphi = \angle BCZ.$$

Herved haves den geometriske Construction af den til det vilkaarlige Punkt M svarende Amplitude φ, nemlig som den Centrivinkel, der begrændses paa den ene Side af en Linie $CB = a$ dragen til Tangenten og paa den anden Side af CZ d. e. af Radius vector til det vilkaarlige Punkt i en Curve af 4de Grad, hvis Ligning erholdes ved Elimination af φ mellem Formlerne (9), nemlig idet x og y skrives istedetfor X og Y:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0. \tag{11}$$

Denne Curves Rectification kan henföres til samme Modulus og Amplitude som Hyperblens, idet $\sqrt{dx^2+dy^2}$ transformeres ved for x og y at indsætte Udtrykkene (9); men Reductionen til elliptiske Functioner gjör atter en ny Substitution nödvendig, nemlig $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\omega$. Dette giver ifölge (9) den umiddelbare Substitution for y og x, nemlig ved at forandre Fortegnet for y d. e. ved at rectificere den Bue, som ligger over Abscisseaxen:

$$y = \frac{a^2 b\lambda \sin\omega\cos\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}, \quad x = \frac{a b^2 \varDelta(\lambda', \omega)\cos\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}. \tag{12}$$

Söges heraf $s = \int_x^a \sqrt{dx^2+dy^2}$, erholdes

$$s = \frac{a^3}{b\sqrt{a^2+b^2}}\,\Pi\left(\frac{a^2}{b^2}-1, \lambda', \omega\right). \tag{13}$$

For $a=b$ falder Ligning (11) sammen med Lemniscatens Ligning, og Formlen (13) reduceres til den bekjendte Formel for Lemniscatens Rectification:

$$y = \frac{a}{\sqrt{8}}\sin 2\omega, \quad s = \frac{a}{\sqrt{2}} F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \omega). \tag{14}$$

4. Vi gaae nu over til de almindeligere Ligninger af 4de Grad

$$(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 + b^2y^2 + \tfrac{1}{4}c^4 = 0, \tag{15}$$

$$(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 + \tfrac{1}{4}c^4 = 0, \tag{16}$$

og vi ville finde, at de tilhöre Curver, som kunne rectificeres ved elliptiske Functioner af 1ste og 3die Art. Leddene x^2 og y^2 kunne vel give to andre Combinationer af Fortegn,

$$+a^2x^2 - b^2y^2, \quad +a^2x^2 + b^2y^2;$$

men det förste af disse Tilfælde vil ved Ombytning af Axerne falde sammen med det ved Ligning (15) givne, og det andet Tilfælde er umuligt. — Vi indföre polære Coordinater ved at sætte

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

hvorved Ligningerne (15) og (16) transformeres til

$$\left.\begin{array}{l} r^4 - \Theta r^2 + \frac{1}{4} c^4 = 0, \\ \Theta = a^2 \cos^2\theta \mp b^2 \sin^2\theta, \end{array}\right\} \tag{17}$$

altsaa, ved Oplösning med Hensyn til r^2,

$$r^2 = \frac{\Theta \pm \sqrt{\Theta^2 - c^4}}{2}, \tag{18}$$

hvoraf igjen

$$r = \frac{\sqrt{\Theta + c^2} \pm \sqrt{\Theta - c^2}}{2}. \tag{19}$$

Af (18) fölger ved Differentiation

$$2r\,dr = -(a^2 \pm b^2)\sin\theta\cos\theta\left[1 \pm \frac{\Theta}{\sqrt{\Theta^2 - c^4}}\right] = \mp(a^2 \pm b^2)\sin\theta\cos\theta\frac{2r^2 d\theta}{\sqrt{\Theta^2 - c^4}},$$

altsaa

$$dr^2 = \frac{(a^2 \pm b^2)^2 \sin^2\theta\cos^2\theta .\, r^2\, d\theta^2}{\Theta^2 - c^4}.$$

Ved at indsætte dette i Rectifications-Formlen

$$s = \int \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}$$

erholdes:

$$s = \int r \sqrt{\frac{a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta - c^4}{\Theta^2 - c^4}}\, d\theta. \tag{20}$$

Ifölge (19) haves

$$\frac{r}{\sqrt{\Theta^2 - c^4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\Theta - c^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{\Theta + c^2}}\right],$$

altsaa ifölge (20), idet ved s_1 og s_2 betegnes de til Ligningerne (15) og (16) respective svarende rectificerede Buer,

$$s_1 = \tfrac{1}{2}\,(U_1 \pm V_1),\quad s_2 = \tfrac{1}{2}\,(U_2 \pm V_2), \tag{21}$$

hvor U_1, V_1, U_2, V_2 betegne disse fire Integraler, som alle kunne udtrykkes ved elliptiske Functioner:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = \displaystyle\int\sqrt{\frac{a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta - c^4}{a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta - c^2}}\,d\theta,\quad V_1 = \int\sqrt{\frac{a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta - c^4}{a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta + c^2}}\,d\theta, \\ U_2 = \displaystyle\int\sqrt{\frac{a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta - c^4}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - c^2}}\,d\theta,\quad V_2 = \int\sqrt{\frac{a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta - c^4}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta + c^2}}\,d\theta. \end{array}\right\} \tag{22}$$

5. **Reductionen til elliptiske Functioner erholdes ved at sætte enten** $\operatorname{tg}\theta = z$ **eller** $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{z}$ **og derefter anvende de bekjendte Transformationer. Resultaterne ere disse:**

Integralet U_1.

1ste Tilfælde:

$$a > c,\ b > c;\ \lambda^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 + b^2},\quad \sin\theta = \sqrt{\frac{a^4 - c^4}{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + c^2}},$$

$$U_1 = (a^2 + c^2)\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}}\, \Pi\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}, \lambda, \varphi\right).$$

2det Tilfælde:

$$a < c,\ b < c;\ \lambda^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2},\quad \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{b^2 + c^2}}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$U_1 = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}}\left[(a^2 - b^2)\,\Pi\left(-\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}, \lambda, \varphi\right) + (b^2 + c^2)F(\lambda, \varphi)\right].$$

3die Tilfælde:

$$a > c > b;\ \lambda^2 = \frac{c^2 - b^2}{a^2 + c^2},$$

1° fra $\theta = 0$ til $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 + c^2}}$ er $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 + c^2}}\sin\varphi$,

$$U_1 = \frac{(a^4 - b^4)\,\Pi\left(\frac{a^2 - c^2}{b^2 + c^2}, \lambda, \varphi\right) - (c^4 - b^4)\,F(\lambda, \varphi)}{\sqrt{(a^4 - c^4)(b^2 + c^2)}};$$

2° fra $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 + c^2}}$ til $\theta = \frac{\pi}{2}$ er $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{a^4 - c^4}{c^4 - b^4}} \cdot \frac{\Delta(\lambda, \psi)}{\cos\psi}$,

$$U_1 = \sqrt{\frac{(a^2 - c^2)(b^2 + c^2)}{a^2 + c^2}}\left[\Pi\left(-\frac{c^2 - b^2}{a^2 - b^2}, \lambda, \psi\right) - F(\lambda, \psi)\right].$$

4de Tilfælde:

$$a < c < b;\ \lambda^2 = \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2},\ \sin\theta = \sqrt{\frac{c^4 - a^4}{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}},$$

$$U_1 = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}}\left[(a^2 - b^2)\,\Pi\left(-\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}, \lambda, \varphi\right) + (b^2 + c^2)\,F(\lambda, \varphi)\right].$$

Integralet V_1.

1ste Tilfælde:

$$a>c, b>c;\ \lambda^2=\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2},\ \sin\theta=\sqrt{\frac{a^4-c^4}{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi-c^2}},$$

$$V_1=(a^2-c^2)\sqrt{\frac{a^2+c^2}{(a^2+b^2)(b^2-c^2)}}\,\Pi\left(\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2},\lambda,\varphi\right).$$

2det Tilfælde: $a<c, b<c$, V_1 imaginær.

3die Tilfælde:

$$a>c>b;\ \lambda^2=\frac{a^2-c^2}{a^2+b^2},\ \sin\theta=\sqrt{\frac{a^4-c^4}{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi-b^2}},$$

$$V_1=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{(a^2+b^2)(c^2-b^2)}}\left[(a^2-b^2)\,\Pi\left(\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2},\lambda,\varphi\right)-(c^2-b^2)\,F(\lambda,\varphi)\right].$$

4de Tilfælde:

$$a<c<b;\ \lambda^2=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2},\ \sin\theta=\sqrt{\frac{c^4-a^4}{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi+c^2\sin^2\varphi-a^2}},$$

$$V_1=(c^2-a^2)\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^4-c^4}}\left[\Pi\left(-\frac{b^2-c^2}{b^2-a^2},\lambda,\varphi\right)-F(\lambda,\varphi)\right].$$

Integralet U_2.

1ste Tilfælde:

$$a>b,\ \text{enten } c>a \text{ eller } c<b;\ \lambda^2=\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2},\ \operatorname{tg}\theta=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$U_2=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{(b^2-c^2)(a^2+c^2)}}\left[(a^2+b^2)\,\Pi\left(\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2},\lambda,\varphi\right)-(b^2-c^2)\,F(\lambda,\varphi)\right].$$

2det Tilfælde:

$$a<b,\ \text{enten } c<a \text{ eller } c>b;\ \lambda^2=\frac{b^2-a^2}{b^2+c^2},\ \operatorname{tg}\theta=\sqrt{\frac{c^4-a^4}{c^4-b^4}}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$U_2=(a^2+c^2)\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^4-b^4}}\,\Pi\left(\frac{b^4-a^4}{c^4-b^4},\lambda,\varphi\right).$$

3die Tilfælde: $a>c>b;\ \lambda^2=\dfrac{b^2+c^2}{a^2+c^2},$

1° fra $\theta=0$ til $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{c^2-b^2}}$ er $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{c^2-b^2}}\sin\varphi,$

$$U_2 = \frac{(a^4-b^4)\,\Pi\left(\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2}, \lambda, \varphi\right) - (c^4-b^4)\,F(\lambda, \varphi)}{\sqrt{(a^4-c^4)(c^2-b^2)}},$$

2º fra $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{a^4-c^4}{c^4-b^4}}$ til $\theta = \frac{\pi}{2}$ er $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{a^4-c^4}{c^4-b^4}} \cdot \frac{\Delta(\lambda, \psi)}{\cos\psi}$,

$$U_2 = \sqrt{\frac{(a^2-c^2)(c^2-b^2)}{a^2+c^2}} \left[\Pi\left(-\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2}, \lambda, \psi\right) - F(\lambda, \psi)\right].$$

4de Tilfælde: $a < c < b$; $\lambda^2 = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$,

1º fra $\theta = 0$ til $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{c^4-a^4}{b^4-c^4}}$ er $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{c^4-a^4}{b^4-c^4}} \sin\varphi$,

$$U_2 = \frac{(b^4-a^4)\,\Pi\left(\frac{c^4-a^4}{b^4-c^4}, \lambda, \varphi\right) - (b^4-c^4)\,F(\lambda, \varphi)}{\sqrt{(c^2-a^2)(b^4-c^4)}},$$

2º fra $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{c^2-a^2}{b^2-c^2}}$ til $\theta = \frac{\pi}{2}$ er $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{c^2-a^2}{b^2-c^2}} \cdot \frac{\Delta(\lambda, \psi)}{\cos\psi}$,

$$U_2 = \sqrt{\frac{(c^2-a^2)(b^2-c^2)}{b^2+c^2}}\, \Pi\left(-\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}, \lambda, \psi\right).$$

Integralet V_2.

1ste Tilfælde:

$a > b > c$ (for $c > a > b$ er V_2 imaginær); $\lambda^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}} \operatorname{tg}\varphi$,

$$V_2 = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)(b^2+c^2)}} \left[(a^2+b^2)\,\Pi\left(\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}, \lambda, \varphi\right) - (b^2+c^2)\,F(\lambda, \varphi)\right].$$

2det Tilfælde:

$c < a < b$ (for $a < b < c$ er V_2 imaginær); $\lambda^2 = \frac{b^2-a^2}{b^2-c^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{a^4-c^4}{b^4-c^4}} \operatorname{tg}\varphi$,

$$V_2 = (a^2-c^2)\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^4-c^4}}\, \Pi\left(-\frac{b^4-a^4}{b^4-c^4}, \lambda, \varphi\right).$$

3die Tilfælde:

$a > c > b$; $\lambda^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$, $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{a^4-c^4}{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\Delta(\lambda, \varphi)}$,

$$V_2 = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}}\left[(a^2+b^2)\,\Pi\left(\frac{a^2-c^2}{b^2+c^2}, \lambda, \varphi\right) - (b^2+c^2)\,F(\lambda, \varphi)\right].$$

4de Tilfælde:

$$a < c < b;\ \lambda^2 = \frac{b^2-c^2}{b^2-a^2},\ \operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{c^4-a^4}{b^4-c^4}}.\ \sec\varphi,$$

$$V_2 = (c^2-a^2)\sqrt{\frac{a^2+c^2}{(b^2-a^2)(b^2+c^2)}}\left[\Pi\left(-\frac{b^4-c^4}{b^4-a^4}, \lambda, \varphi\right) - F(\lambda, \varphi)\right].$$

6. Det sees, at naar $c = 0$ og Integralerne U_1 og V_1 bestemmes ifölge 1ste Tilfælde, kommer man tilbage til Formlerne (11), (12), (13), idet nederste Fortegn her maa forkastes. — Naar enten $a = c$ eller $b = c$, kunne alle fire Integraler (22) bestemmes under endelig Form, hvorimod Udtrykkene ved elliptiske Functioner reduceres til Formen $0.\infty$; men da $a = c$ gjör Ligning (15) umulig, erholdes alene tre Tilfælde, nemlig:

$$\left.\begin{aligned}
&(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 + b^2y^2 + \tfrac{1}{4}b^4 = 0,\ s = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\left[\operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}\sin\theta\right) \pm \theta\right],\\
&(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 + \tfrac{1}{4}a^4 = 0,\ s = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{2}\left[\theta \pm \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}}\cos\theta\right)\right],\\
&(x^2+y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 + \tfrac{1}{4}b^4 = 0,\ s = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\left[\theta \pm \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}\sin\theta\right)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Det andet og tredie af disse Tilfælde falde i Grunden sammen; thi det ene af dem kan udledes af det andet ved Ombytning af a og b, idet tillige Axerne ombyttes, altsaa θ forandres til $\frac{\pi}{2} + \theta$. — For $a = b$ erholdes ifölge (17) ved at tage överste Fortegn, og ved Udtrykkene for U_1 og V_1 i 1ste Tilfælde:

$$\left.\begin{aligned}
&r^4 - a^2r^2\cos 2\theta + \tfrac{1}{4}c^4 = 0,\\
&\lambda^2 = \frac{a^2-c^2}{2a^2},\ \sin\theta = \lambda\sin\varphi = \lambda'\sin\psi,\ s = a\frac{\lambda\lambda'}{\sqrt{2}}\left[F(\lambda, \varphi) \pm F(\lambda', \psi)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Denne Curve hörer til dem, hvori Produktet af et hvilketsomhelst Punkts

Afstande til to faste Punkter er constant (Cassinis Ellipser), hvorunder Lemniscaten er indbefattet ved at tage $c=0$, altsaa $\lambda=\lambda'=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\varphi=\psi$, hvorved atter (14) erholdes, idet nederste Fortegn forkastes. Derimod vil Ligning (17) med nederste Fortegn for $a=b$ tilhöre et System af to concentriske Cirkler; thi man erholder

$$r=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+c^2}\pm\sqrt{a^2-c^2}\right),$$

hvorefter U_2 og V_2 bestemte ifölge 1ste eller 2det Tilfælde give $s=r\,\theta$.

7. Forandres i (15) c^4 til $-c^4$, erholdes

$$(x^2+y^2)^2-a^2x^2+b^2y^2-\tfrac{1}{4}c^4=0, \tag{25}$$

tilhörende en Curve, hvis Rectification almindeligen leder til ultra-elliptiske Functioner af 2den Classe (d. e. dem, som fölge nærmest efter de elliptiske, idet Qvadratrodstegnet indeholder et heelt Polynomium af 5te eller 6te Grad), hvilket ogsaa gjælder om de to andre Ligninger af samme Form som (25), men hvor de midterste Led ere respective

$$-a^2x^2-b^2y^2,\quad +a^2x^2+b^2y^2.$$

Det fjerde Tilfælde $+a^2x^2-b^2y^2$, som eensgjældende med det förste $-a^2x^2+b^2y^2$, behöver ikke at omtales. Ved i (20) at indsætte Udtrykket for r ifölge (18) idet c^4 forandres til $-c^4$ (saa at nederste Fortegn foran Rodtegnet maa forkastes, da det vilde gjöre r^2 negativ) erholdes Formlen for den til Ligning (25) hörende rectificerte Bue s:

$$s=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{a^4\cos^2\theta+b^4\sin^2\theta+c^4}{(a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta)^2+c^4}}\sqrt{a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta+\sqrt{(a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta)^2+c^4}}\,d\theta. \tag{26}$$

Sættes $\sqrt{(a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta)^2+c^4}=u-(a^2\cos^2\theta-b^2\sin^2\theta)$, erholdes

$$\operatorname{tg}\theta=\sqrt{\frac{c^4+2a^2u-u^2}{-c^4+2b^2u+u^2}},\quad s=-\tfrac{1}{2}\int\sqrt{\frac{(b^2-a^2)c^4+2(a^2b^2+c^4)u-(b^2-a^2)u^2}{(c^4+2a^2u-u^2)(-c^4+2b^2u+u^2)}}\,du, \tag{27}$$

som henhörer til den ovenfor nævnte Functionsclasse.

8. Alene det specielle Tilfælde $a=b$ fortjener her at undersöges. Curven hörer da atter til dem, hvor det vilkaarlige Punkts Afstande til

to faste Punkter give et constant Produkt. Formlen (27) giver for $a = b$ og ved at sætte $u = c^2 v^2$:

$$s = -c\sqrt{2(a^4+c^4)}\int\frac{v^2\,dv}{\sqrt{-c^4+2(2a^4+c^4)v^4-c^4v^8}}. \tag{28}$$

Dette Integral kan, som bekjendt, reduceres til elliptiske Functioner (s. *Legendre,* Traité des fonctions elliptiques, T. I, pag. 254). Söges heraf de umiddelbare Substitutioner for θ i Relation til Amplituderne, vil denne Rectification være simplere at fremstille saaledes. Curvens Ligning er

$$r^4 - a^2 r^2 \cos 2\theta - \tfrac{1}{4} c^4 = 0, \tag{29}$$

og ifölge (26) haves

$$s = \sqrt{\frac{a^4+c^4}{2}}\int\sqrt{\frac{a^2\cos 2\theta + \sqrt{a^4\cos^2 2\theta + c^4}}{a^4\cos^2 2\theta + c^4}}\,d\theta$$

eller

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{\sqrt{a^4+c^4}}{2}(P+Q),\\ P &= \int\sqrt{\frac{c^2+\sqrt{a^4\cos^2 2\theta+c^4}}{a^4\cos^2 2\theta+c^4}}\,d\theta,\quad Q = \int\sqrt{\frac{-c^2+\sqrt{a^4\cos^2 2\theta+c^4}}{a^4\cos^2 2\theta+c^4}}\,d\theta. \end{aligned}\right\}$$

Disse to Integraler reduceres umiddelbart til elliptiske Functioner af 1ste Art ved at sætte

$$\lambda^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{\sqrt{a^4+c^4}}\right),\ \lambda'^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{c^2}{\sqrt{a^4+c^4}}\right),\ \sin 2\theta = \frac{\sin\varphi\,\Delta(\lambda,\varphi)}{\lambda'} = \frac{\sin\psi\,\Delta(\lambda',\psi)}{\lambda}. \tag{30}$$

Man finder nemlig

$$P = \frac{1}{\sqrt[4]{4(a^4+c^4)}}F(\lambda,\varphi),\quad Q = \frac{1}{\sqrt[4]{4(a^4+c^4)}}F(\lambda',\psi),$$

fölgelig

$$s = \frac{\sqrt[4]{a^4+c^4}}{2\sqrt{2}}\Big[F(\lambda,\varphi) + F(\lambda',\psi)\Big]. \tag{31}$$

Dette Resultat, indeholdt i Formlerne (29), (30), (31), kunne vi sammenstille med det forhen fundne, udtrykt ved Formlerne (24). Den almindelige Ligning for disse Curver er:

$$r^4 - 2\,e^2\,r^2 \cos 2\,\theta + e^4 - f^4 = 0,$$

hvor det constante Produkt af det vilkaarlige Punkts Afstande til de to faste Punkter er sat $= f^2$, Excentriciteten eller de to faste Punkters halve Afstand $= e$. Ved at adskille de to Tilfælde $e > f$ og $e < f$ erholdes:

$$1^0.\ \frac{f^2}{e^2} = \sin\alpha, \quad \sin\theta = \sin\tfrac{1}{2}\alpha . \sin\varphi = \cos\tfrac{1}{2}\alpha . \sin\psi,$$

$$s = \frac{f^2}{2e}\left[F(\sin\tfrac{1}{2}\alpha, \varphi) \pm F(\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \psi)\right];$$

$$2^0.\ \frac{e^2}{f^2} = \sin\alpha, \quad \sin 2\theta = \frac{\sin\varphi . \varDelta(\sin\tfrac{1}{2}\alpha, \varphi)}{\cos\tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\psi . \varDelta(\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \psi)}{\sin\tfrac{1}{2}\alpha},$$

$$s = \frac{f}{2}\left[F(\sin\tfrac{1}{2}\alpha, \varphi) + F(\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \psi)\right];$$

og Lemniscaten danner Overgangstilfældet $e = f$.

Anmærkning. Denne Afhandling blev af Forfatteren fremlagt i Videnskabernes Selskabs Möde d. 30te Juni 1843 (s. *Oversigt over det Kongelige danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider i Aaret 1843* Pag. 83). Kort efter modtog han Journal de mathématiques par J. Liouville, avril 1843, hvor *Alfred Serret* er kommen til de samme Resultater angaaende Rectificationen af Cassinis Ellipser, i en Afhandling betitlet: Note sur les fonctions elliptiques de première espèce, prés. a l'acad. des sciences le 24 avril 1843.